Corrigé du III. 3) du DM sur les solides de Platon

a- IJEFGH est le dual du cube donc c'est un octaèdre régulier. Par définition de ce dernier, les faces de IJEFGH sont des triangles équilatéraux.

<u>Remarque</u> : on aurait pu aussi remarquer que chaque arête de l'octaèdre étant obtenue en reliant les centres de deux faces consécutives du cube, les arêtes sont toutes de même longueur. Donc les faces de IJEFGH sont des triangles équilatéraux par définition.

b- Les faces du cube sont des carrés de côté a. Donc les diagonales des faces sont de longueur égale à $a\sqrt{2}$ (résultat que l'on peut éventuellement redémontrer en utilisant le théorème de Pythagore). De plus les diagonales des carrés se coupent en leur milieu.

Si l'on se place dans le plan (B'AC) on peut appliquer le théorème des milieux :
Dans le triangle B'AC, E est le milieu de [AB'] et F celui de [B'C]. Or dans un triangle la longueur du segment qui joint les milieux de deux côtés est égale à la moitié de la longueur du troisième côté. Donc $EF = \frac{1}{2}AC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

De même, en se plaçant respectivement dans les plans (BC'D), (ACD') et (DBA'), on obtient :
$FG = GH = HE = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.
<u>Remarque</u> : on pouvait aussi conclure avec le fait que les faces de l'octaèdre étant des triangles équilatéraux, les longueurs sont toutes égales à $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

c- Si l'on se place dans le plan (B'AC) on peut appliquer le théorème des milieux :
Dans le triangle B'AC, E est le milieu de [AB'] et F celui de [B'C]. Or dans un triangle la droite qui passe par les milieux de deux côtés est parallèle au support du troisième côté. Donc (EF)//(AC).

De même, en se plaçant le plan (ACD'), on obtient (HG)//(AC).
Les droites (EF) et (HG) sont parallèles à la même droite (AC) donc elles sont parallèles entre elles.
Les droites (EF) et (HG) étant parallèles, elles sont coplanaires et donc E, F, G et H sont coplanaires.

De même, en se plaçant dans les plans (A'C'B) et (DC'B), on obtient respectivement que (IE)//(BC') et (GJ)//(BC'). Puis que I, E, J et G sont coplanaires.

d- Les faces étant des carrés, (A'D')//(AD) et (BC)//(AD), or si deux droites sont parallèles à une même troisième alors elles sont parallèles. Donc (A'D')//(BC).
Ces deux droites étant parallèles, elles sont coplanaires et donc A', B, C et D' sont coplanaires.

Dans le plan (A'BC), on montre facilement que A'BCD' est un rectangle :

Puisque (A'D')//(BC) et A'D = BC = a, le quadrilatère A'BCD' a deux côtés de même longueur et de supports parallèles donc c'est un parallélogramme.

De plus (A'D') $\perp$ (A'AB) donc (A'D') $\perp$ (A'B) (on a utilisée la propriété : « si une droite est perpendiculaire à un plan alors elle est perpendiculaire à toute droite sécante de ce plan »).
Or si un parallélogramme possède un angle droit alors c'est un rectangle. Donc A'BCD' est un rectangle.

Dans le rectangle A'BCD', E est le milieu de [A'B] et G celui de [D'C], [EG] est donc une médiane de ce rectangle et donc EG = BC = a.

<u>Remarque</u> : au lieu d'utiliser la médiane d'un rectangle, on peut aussi démontrer que EGCB est un parallélogramme (puisque (EB)//(GC) et EB=GC) et conclure.

e- Dans le triangle EFG,

$EF^2 + GF^2 = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{2a^2}{4} + \frac{2a^2}{4} = a^2$ et $EG^2 = a^2$ donc $EG^2 = EF^2 + GF^2$

D'après la réciproque du théorème de Pythagore, EGF est donc un triangle rectangle en F d'où : EFG = 90°.

Le quadrilatère EFGH, ayant ses quatre côtés de même longueur et un angle droit, est un carré.

f- Si O est le centre du carré EFGH, les droites (EG) et (HF) se coupent perpendiculairement en O.

De plus que I, E, J et G sont coplanaires donc (IJ) $\subset$ (IEG).

De même qu'en c) on aurait pu montrer que I, H, J et F sont coplanaires, en considérant les droites (HI) et (FJ). Et donc (IJ) $\subset$ (IHF).

Les plans distincts (IEG) et (IHF) ont donc pour droite d'intersection (IJ).

Or O étant sur (EG) et (HF), il est dans chacun des plans (IEG) et (IHF) donc sur (IJ).

En c) on a montré que (EF)//(AC). On aurait pu de même montrer que (GF)//(BD) (en utilisant le théorème des milieux dans C'DB). De plus (EF) et (GF) sont sécantes en F et (AC) et (BD) sécantes en J. Or si deux droites sécantes d'un plan sont parallèles respectivement à deux droites sécantes d'un deuxième plan alors ces deux plans sont parallèles.

Donc les plans (EFG) et (ABD) sont parallèles.

La droite (IJ) qui passe par les centres des deux faces parallèles du cube, ABCD et A'B'C'D', est perpendiculaire à (ABD) donc à (EFG). Par conséquent (IJ) est perpendiculaire à toute droite de (EGF) qui la coupe. En particulier (IJ) $\perp$ (EG) et (IJ) $\perp$ (HF).

Autre méthode Si O est le centre du carré EFGH, ses diagonales [EG] et [FH] se coupent perpendiculairement en leur milieu O.

Par un raisonnement analogue à celui fait de b) à e) on pourrait montrer que le quadrilatère EIGJ est un carré (il faut montrer que les points sont non coplanaires, que les longueur des côtés sont toutes identiques et qu'enfin ce quadrilatère possède un angle droit). Alors les diagonales [EG] et [IJ] se coupent perpendiculairement en leur milieu O.

Les droites (EG), (IJ) et (HF) sont donc concourantes en O avec (FH) $\perp$ (EG) et (IJ) $\perp$ (EG). Reste à montrer (IJ) $\perp$ (HF). On peut refaire le raisonnement précédent avec IHJF…

g- <u>Définition</u> : le plan médiateur de [IJ] est le plan qui passe par le milieu de [IJ] et qui est perpendiculaire à ce segment.

On a montré en f) que (IJ) est perpendiculaire à (EFG) et qu'elle coupe ce plan en O.

Les triangles OIE et OJE sont donc des triangles rectangles en O. En appliquant le théorème de Pythagore dans ces triangles on montre facilement que OI = OJ. Et donc O, qui appartient à (IJ), est le milieu de [IJ]. De plus O appartient à (EFG). Par définition, (EFG) est donc le plan médiateur de [IJ].

g- L'octaèdre régulier est constitué de 8 faces superposables qui sont des triangles équilatéraux de côté $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

h- D'où : $\mathcal{A} = 8 \times \frac{b \times h}{2} = 8 \times \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2} \times \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}\sqrt{3}}{2}}{2} = 8 \times \frac{a\sqrt{2}}{2} \times \frac{a\sqrt{2}}{2} \times \sqrt{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = a^2\sqrt{3}$.

L'octaèdre régulier est constitué de deux pyramides régulières de hauteur OI $= \frac{1}{2}$ IJ $= \frac{1}{2}a$.

La base de chacune des pyramides étant le carré EFGH de côté $\frac{a\sqrt{2}}{2}$, son aire est $\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{2}$.

Donc $\mathcal{V} = 2 \times \frac{\mathcal{B} \times h}{3} = 2 \times \frac{\frac{a^2}{2} \times \frac{a}{2}}{3} = 2 \times \frac{a^2}{2} \times \frac{a}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{a^3}{6}$.

Remarque : L'octaèdre a un volume 6 fois moins important que son dual !